

**Faculté des Sciences de la Matière**  
**Département de Physique**

**Correction de l'examen de physique statistique S6 (2023/2024)**  
**3<sup>ème</sup> Année Physique Energétique**

**Question de cours: (5pt)**

- Soit  $P_n(N)$  une distribution binomiale, montrer que  $\bar{n} = NP_A$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n P_n(N) = \sum_{n=0}^N n C_N^n P_A^n P_B^{N-n} = n P_A$$

**(0.5pt) (1.5pt)**

- Montrer que l'entropie d'un système micro-canonique s'écrit:  $S = \frac{\bar{E}}{T} + K_b \ln(Z)$   
Ou  $Z$  est la fonction de partition.

$$S = -K_b \sum_i P_i \ln(P_i) \quad \text{et} \quad P_i = \frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z} \quad \text{(0.5pt)}$$

$$\begin{aligned} S &= -K_b \sum_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z} \ln\left(\frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z}\right) = -K_b \sum_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z} (-\beta \epsilon_i - \ln(Z)) \\ &= K_b \beta \sum_i \frac{\epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}}{Z} + K_b \ln(Z) \sum_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z} \\ &= K_b \beta \sum_i \epsilon_i \frac{n_i}{N} + K_b \ln(Z) \sum_i \frac{n_i}{N} = K_b \beta \frac{E}{N} + K_b \ln(Z) = \frac{\bar{E}}{T} + K_b \ln(Z) \end{aligned}$$

**(2pt)**

**Ex 01: (5pt)**

- Calcule de la fonction de partition d'une molécule possédant un nombre infini de niveau d'énergie non dégénérés régulièrement espacés.

$$Z = 1 + e^{-\beta \epsilon} + e^{-2\beta \epsilon} + e^{-3\beta \epsilon} + \dots = \frac{1 - (e^{-\beta \epsilon})^\infty}{1 - e^{-\beta \epsilon}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon}}$$

**(1pt) (1pt)**

- Calcule de l'énergie moyenne

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \epsilon \frac{e^{-\beta \epsilon}}{(1 - e^{-\beta \epsilon})} = \epsilon \frac{1}{e^{\beta \epsilon} - 1}$$

**(0.5pt) (0.5pt)**

A basse température  $\beta \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{E} \approx \epsilon e^{-\beta \epsilon} \quad \text{(0.5pt)}$

A haute température  $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\beta \epsilon} \approx 1 + \beta \epsilon \Rightarrow \bar{E} \approx \epsilon \frac{1}{\beta \epsilon} = k_b T \quad \text{(0.5pt)}$

- Calcule de la capacité calorifique

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial E}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{\partial E}{\partial \beta} k_B \beta^2 = k_B \epsilon^2 \frac{\beta^2 e^{\beta \epsilon}}{(e^{\beta \epsilon} - 1)^2}$$

(0.5pt) (0.5pt)

**Ex 02: (5pt)**

a)- Les quatre premiers niveaux d'énergie de chaque particule sont :

-  $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$  ( $n=0$ ) et la dégénérescence  $g_0 = 1$ . (0.25pt)

-  $\epsilon_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$  ( $n=1$ ) et la dégénérescence  $g_1 = 1$ . (0.25pt)

-  $\epsilon_2 = \frac{5}{2} \hbar \omega$  ( $n=2$ ) et la dégénérescence  $g_2 = 1$ . (0.25pt)

-  $\epsilon_3 = \frac{7}{2} \hbar \omega$  ( $n=3$ ) et la dégénérescence  $g_3 = 1$ . (0.25pt)

b)- le nombre 'd'états microscopiques accessibles au système 1, au système 2 et au système total.

Le nombre 'd'états microscopiques accessibles au système 1 d'énergie  $E_1 = 4\hbar\omega$ :

On les possibilités suivantes:

- La première particule peut prendre l'énergie  $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$  et la deuxième particule l'énergie  $\epsilon_3 = \frac{7}{2} \hbar \omega$  (ou l'inverse)  $\Rightarrow$  le nombre d'états  $w_1 = 2 \times g_0 \times g_3 = 2$  (0.25pt)

- La première particule peut prendre l'énergie  $\epsilon_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$  et la deuxième particule l'énergie  $\epsilon_2 = \frac{5}{2} \hbar \omega$  (ou l'inverse)  $\Rightarrow$  le nombre d'états  $w_2 = 2 \times g_1 \times g_2 = 2$  (0.25pt)

Le nombre 'd'états microscopiques accessibles au système 1 d'énergie  $E_1 = 4\hbar\omega$  est  $w_{s1} = w_1 + w_2 = 4$  (0.5pt)

Le nombre 'd'états microscopiques accessibles au système 2 d'énergie  $E_2 = 2\hbar\omega$ :

- La première particule peut prendre l'énergie  $\epsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$  et la deuxième particule l'énergie  $\epsilon_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$  (ou l'inverse)  $\Rightarrow$  le nombre d'états  $w_3 = 2 \times g_0 \times g_1 = 2$  (0.25pt)

Le nombre 'd'états microscopiques accessibles au système 2 d'énergie  $E_2 = 2\hbar\omega$  est  $w_{s2} = w_3 = 2$  (0.25pt)

Le nombre 'd'états microscopiques accessibles au système 1 et 2

$w_{T1} = w_{s1} w_{s2} = 8$  (0.5pt)

c)-

- La quantité qui se conserve pendant la transformation est l'énergie totale du système qu'est égale à  $E_T = E_1 + E_2 = 6\hbar\omega$  (0.5pt)

Lorsque la paroi qui sépare les deux sous-systèmes 1 et 2 est rendue diatherme, on a possibilités suivantes:

- La première particule peut prendre l'énergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , la deuxième particule l'énergie  $\frac{7}{2}\hbar\omega$ , la troisième particule peut prendre l'énergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  et la quatrième particule l'énergie  $\frac{3}{2}\hbar\omega$  (on peut faire  $\frac{4!}{2!}$  permutation)  $\Rightarrow$  le nombre d'états  $w_1 = \frac{4!}{2!} = 12$  (0.5pt)

- La première particule peut prendre l'énergie  $\frac{3}{2}\hbar\omega$ , la deuxième particule l'énergie  $\frac{5}{2}\hbar\omega$ , la troisième particule peut prendre l'énergie  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  et la quatrième particule l'énergie  $\frac{3}{2}\hbar\omega$  (on peut faire  $\frac{4!}{2!}$  permutation)  $\Rightarrow$  le nombre d'états  $w_2 = \frac{4!}{2!} = 12$  (0.5pt)

Le nombre d'états microscopiques accessibles au système 1 et 2

$$w_{r2} = w_1 + w_2 = 24 \quad (0.5pt)$$

**Ex 03 : (5pt)**

a)- A l'état final le compartiment A occupe N/3 particules et le compartiment B occupe 2N/3 particule. (0.5pt)

b)-La probabilité pour qu'une molécule soit dans le compartiment A dans l'état final est 1/3. (0.5pt)

c)- La probabilité pour que les N molécules initiales soient toutes rassemblés dans A est  $(1/3)^N$  (0.5pt)

Pour calculer le nombre d'état on applique la relation:

$$w = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_i!\dots} \quad (0.25pt)$$

A l'état initial on N particules dans le compartiment A et 0 particules dans le compartiment B  $w_i = \frac{N!}{N!0!} = 1$  (0.5pt)

$$S_i = K_b \ln(w_i) = K_b \ln(1) = 0 \quad (0.5pt)$$

A l'état final on N/3 particules dans le compartiment A et 2N/3 particules dans le compartiment B

$$w_f = \frac{N!}{\left(\frac{N}{3}\right)! \left(\frac{2N}{3}\right)!} \quad (0.5pt)$$

$$\begin{aligned}
S_f &= K_b \ln(w_f) = K_b \ln\left(\frac{N!}{\frac{N}{3}! \frac{2N}{3}!}\right) \\
&\approx N \ln(N) - N - \frac{N}{3} \ln\left(\frac{N}{3}\right) + \frac{N}{3} - \frac{2N}{3} \ln\left(\frac{2N}{3}\right) + \frac{2N}{3} \\
&= N \ln(N) - \frac{N}{3} \ln(N) + \frac{N}{3} \ln(3) - \frac{2N}{3} \ln(N) + \frac{2N}{3} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= N \left(\frac{1}{3} \ln(3) + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = N \left(\ln(3) - \frac{2}{3} \ln(2)\right)
\end{aligned}$$

(0.25pt) + (1pt)

La variation d'entropie est

$$\Delta S = S_f - S_i = N \left(\ln(3) - \frac{2}{3} \ln(2)\right) \quad (0.5pt)$$